Index ratio sets for minimal equivalence relations-subrelations (Free products in operator algebras and related topics)

AUTHOR(S):

佐野, 隆志

数理解析研究所講究録
1177巻 2000年 74-77

Index ratio sets for minimal equivalence relations-subrelations

山形大学理学部数理科学科　佐野隆志 (Takashi Sano)
Department of Mathematical Sciences,
Faculty of Science, Yamagata University

本講演では，ジョーンズの指数理論で展開された，ergodic equivalence relations-subrelationsの分類結果のC*環バージョンについて言及する：C. SutherlandやT. Hamachiによりエルゴード的同値関係の組についてはよく分っている。(See [H].) そこではchoice functionsにより定まるindex cocycleからindex ratio set。なる有限群の組を得て，それら群の作用で同値関係の標準的な分解を与えている。ここでは，minimalなequivalence relation-subrelationに対してある種のindex cocycleが与えられた時，同様の議論が行えることについて述べる。

Xをコンパクト距離空間とし，X上離散群Gが作用している，とする。(X上の同相写像の全体をHomeo(X)とかけば，$G \subseteq \mathrm{Homeo}(X)$.) Gによる同値関係

$$\mathcal{R} = \mathcal{R}_G := \{ (gx, x) \mid x \in X,\ g \in G \}$$

を考える。

G (or $\mathcal{R}_G$) が <u>minimal</u> であるとは，以下の(同値

な）条件（のどれか）を満たすとき，をいう：

① ${}^\forall x \in X$ に対し　$Gx (= \mathcal{R}(x) = \mathrm{Orb}_G\, x) \underset{\text{dense}}{\subseteq} X$.

② $E (\subseteq X)$ closed, $gE = E \ ({}^\forall g) \Rightarrow E = \phi$ or X.

③ ${}^\forall U (\neq \phi)$ open に対し，$X = \bigcup_{g \in G} gU$.

よく知られた事実として　G が minimal でないとき

$$gY = Y \ ({}^\forall g \in G), \quad G|_Y : \text{minimal}$$

なる閉集合 $Y (\subseteq X)$ が存在する。

さて，$\mathcal{R} := \mathcal{R}_G \supsetneqq \mathcal{S}$ を minimal equivalence relation - subrelation とし，次の２つの設定を加える：

① $X \ni x \longmapsto \#\{\mathcal{S}(y) \mid y \underset{\mathcal{R}}{\sim} x\}$: constant $(=: N)$

② $\sigma : \mathcal{R} \ni (gx, x) \longmapsto \sigma(gx, x) \in \mathfrak{S}_N$

$\left(\begin{array}{l} \text{homomorphism},\ X \text{上 continuous}, \\ \mathcal{S} \supsetneqq \ker \sigma := \{(y, x) \in \mathcal{R} \mid \sigma(y, x) = e\} \end{array}\right)$

なる写像 σ が与えられている。

（choice functions $\varphi_1, \cdots \varphi_N$ $(\varphi_1 = id)$ が存在するときは，$\sigma(y, x)(i) = j \underset{\text{def}}{\Longleftrightarrow} \varphi_i(x) \underset{\mathcal{S}}{\sim} \varphi_j(y)$　と定義すれば，②（連続性以外）は成立する。）

$$[\mathcal{R}] := \{\varphi \in \mathrm{Homeo}(X) \mid \varphi x \in \mathcal{R}(x),\ {}^\forall x\}$$

$$[\mathcal{R}]_* := \{\varphi : \mathrm{Dom}\,\varphi\ (\text{open}) \longrightarrow \mathrm{Im}\,\varphi \ \text{homeo},\ \varphi x \in \mathcal{R}(x)\ {}^\forall x \in \mathrm{Dom}\,\varphi\}$$

とし，

$$\mathcal{L}_0(\mathcal{S}) := \left\{ \theta \in \mathfrak{S}_N \;\middle|\; \begin{array}{l} \forall\, U : \text{open} \ (\subseteq X) \\ \forall\, x_0, y_0 \in U \\ \exists\, \varphi, \psi \in [\mathcal{S}]_* \quad \text{s.t.} \\ \quad \mathrm{Dom}\,\varphi\ (\ni x_0),\ \mathrm{Im}\,\varphi \subseteq U \\ \quad \mathrm{Dom}\,\psi\ (\ni y_0),\ \mathrm{Im}\,\psi \subseteq U \\ \& \\ \quad \sigma(\varphi x, x) = \theta \quad \forall x \in \mathrm{Dom}\,\varphi \\ \quad \sigma(\psi y, y) = \theta^{-1} \quad \forall y \in \mathrm{Dom}\,\psi \end{array} \right\}$$

とおけば，$\mathcal{L}_0(\mathcal{S})$は群になる。また

$$Q := \{ (y, x) \in \mathcal{S} \mid \sigma(y, x) \in \mathcal{L}_0(\mathcal{S}) \}$$

とおくと　$\#\{\mathrm{Ker}\,\sigma\text{-minimal 成分}\} < +\infty$

であることが，$\mathrm{Ker}\,\sigma$-minimal 成分 $=$ Q-minimal 成分であることから示される。これより $\{A_\lambda \mid \lambda \in \Lambda\}$ を $\mathrm{Ker}\,\sigma$-minimal 成分よりなる X の有限分割 ($\#\Lambda < \infty$) とする。

各 $\lambda \in \Lambda$ に対し

$\mathcal{L}_\lambda(\mathcal{S}) :=$ "上の $\mathcal{L}_0(\mathcal{S})$ の定義で $U \subseteq A_\lambda$ に制限したもの"

$\mathcal{L}_\lambda(\mathcal{R}) :=$ "$\mathcal{L}_\lambda(\mathcal{S})$ の定義で $\varphi, \psi \in [\mathcal{R}]_*$ と置き換えたもの"

と定義すると，

$$\mathfrak{r}_\lambda(\mathcal{R}) \supseteq \mathfrak{r}_\lambda(\mathcal{S}) \underset{\text{conjugate}}{\sim} \underset{\substack{\| \\ G}}{\mathfrak{r}_{\lambda_0}(\mathcal{R})} \supseteq \underset{\substack{\| \\ H}}{\mathfrak{r}_{\lambda_0}(\mathcal{S})}$$

となることも分る。

あとは，Gの free な作用 α_g を作り，$\mathcal{P}(\subseteq \mathcal{S})$ という subrelation を定義して

$$\mathcal{R} = \mathcal{P} \rtimes_\alpha G \supseteq \mathcal{S} = \mathcal{P} \rtimes_\alpha H$$

と表せることなど，論文 [H] と同様に議論することができる。（説明を省いた記号・定義等については [H] を参照.）

Reference

[H] : T. Hamachi, Canonical subrelations of ergodic equivalence relations – Subrelations J. Operator Theory 43 (2000) 3-34.